

Petri Rönnholm

# Yksittäisen kuvan geometrisista ominaisuuksista

Fotogrammetrian, kuvatulkinnan ja kaukokartoituksen erikoistyö

2003

Fotogrammetrian ja kaukokartoituksen laboratorio, TKK

# SISÄLLYS

<b>1</b>	<b>JOHDANTO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>IDEAALISEN KUVAN GEOMETRISIA PIIRTEITÄ JA MUUNNOKSIA</b>	<b>2</b>
2.1	Kameran projektiokeskus	2
2.2	Kuvan pääpiste	2
2.3	Kameravakio	4
2.4	Todellinen ja näkyvä horisontti	5
2.5	Kameran suurin kallistus	6
2.6	Nadiiri- ja zeniittipisteet	6
2.7	Isosentri	7
2.8	Pakopisteet ja -suorat	8
2.9	Mittakaava kuvalla	10
2.10	Kollineaarisuus, kaksoissuhde ja yksiulotteinen projektiivinen muunnos	11
2.11	Kaksiulotteinen projektiivinen muunnos	13
2.12	Kollineaarisuusehto ja -yhtälöt	14
<b>3</b>	<b>KUVIEN GEOMETRISET KORJAUKSET</b>	<b>15</b>
3.1	Linssivirheiden korjaus	15
3.2	Maankaarevuus	16
3.2.1	Maankaarevuuden vaikutus	17
3.2.2	Maankaarevuuden vaikutus horisontissa	18
3.3	Refraktion vaikutus	19
3.3.1	Pystykuvauksiin soveltuva refraktiokorjaus	19
3.3.2	Refraktiokorjaus sekä pysty- että viistokuville	20
3.3.3	Yhdistetty refraktion ja maankaarevuuden vaikutus näkyvään horisonttiin	23
<b>4</b>	<b>LÄHTEET</b>	<b>25</b>

**LIITE 1. Kuvan pakopisteiden määrittäminen**

**LIITE 2. Kuvan pääpisteen määrittäminen pakopisteiden avulla**

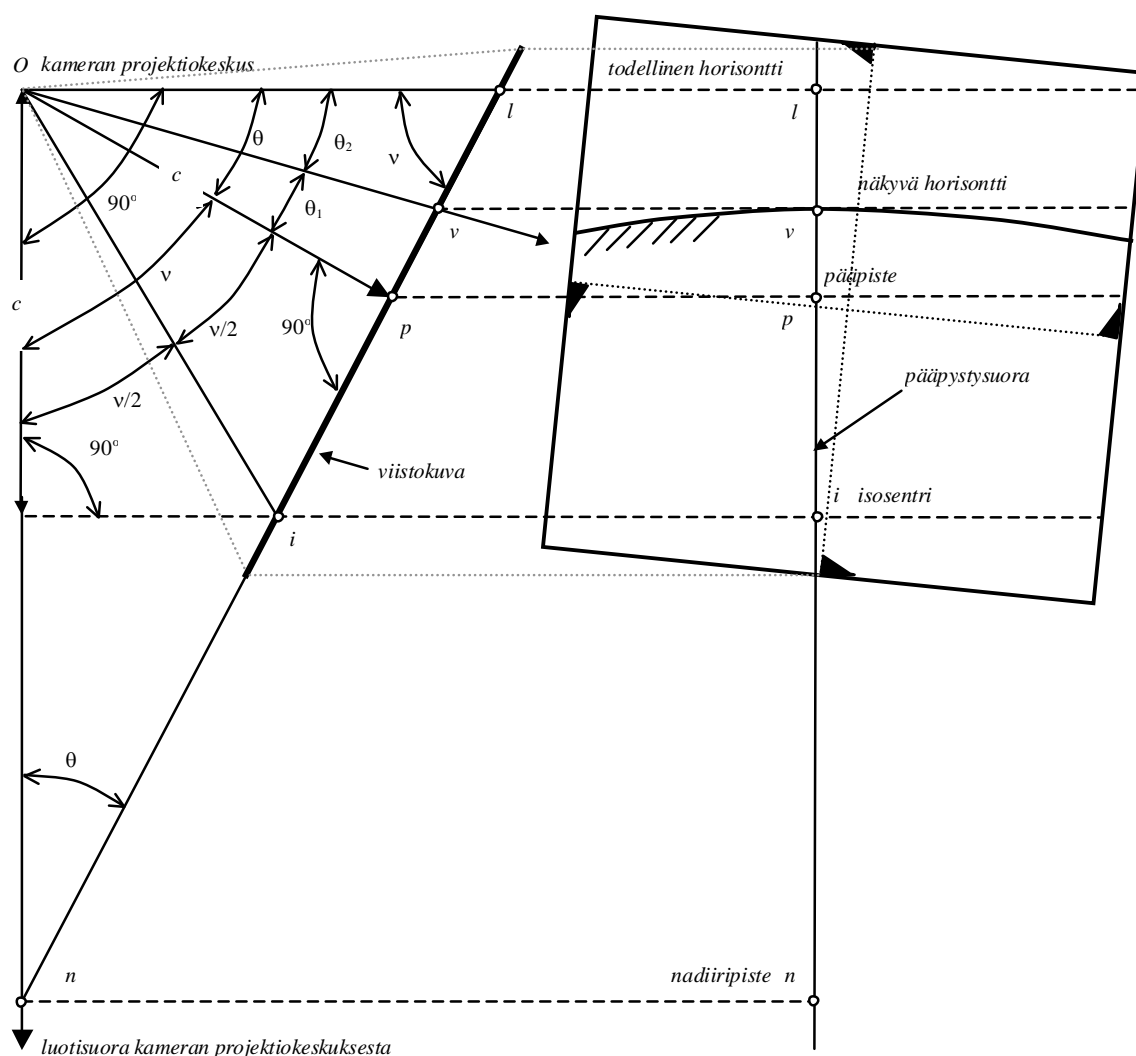
**LIITE 3. Kuvan isosentripisteen etsiminen graafisesti**

**LIITE 4. Kameran polttovälin määrittäminen graafisesti**

**LIITE 5. Perspektiivisen kohteen isosentriprojektion graafinen määrittäminen**

# 1 Johdanto

Fotogrammetriassa käytetään kuvia kohteen mittaamiseen. Kuvamittauksia varten on tyypillisesti selvitettävä sisäinen orientointi eli minkälainen projektiosädekimppu on kuvan muodostanut, ulkoinen orientointi eli määritettävä, miten tämä sädekimppu sijaitsee kuvaushetkellä avaruudessa sekä pyrittävä poistamaan projektiivista geometriasta rikkovia kuvavirheitä. Kuville tallentuu paljon tietoa, jota ei voi käyttää hyväksi ilman tietämystä kuvan geometrisista ominaisuuksista. Fotogrammetriassa on viime aikoina keskitytty voimakkaasti käyttämään mittauksissa kahta tai useampaa kuvaa, mikä tarjoaakin hyvin vankan mittausgeometrian. Työssäni olen kuitenkin halunnut esitellä myös niitä yksittäisen kuvan geometrisia ominaisuuksia, joita voisi käyttää hyväksi yksikuvamittauksissa. Suurin osa teoriasta toki on suoraan käytettävissä myös stereokuvien tai kuvablokkien tapauksessa. Kuvassa 1 on koottuna tärkeimpiä yksittäisen kuvan geometrisia ominaisuuksia, joita käsitellään myöhemmin tarkemmin.

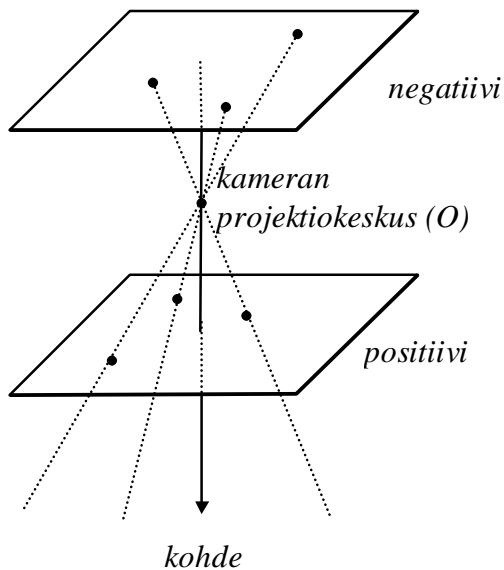


Kuva 1. Viistokuvan geometriaa. Käytetyt symbolit:  $v$  on kuvan suurin kallistus luotisuorasta,  $\theta$  on kuvakallistus horisontin suhteen,  $c$  on kameravakio,  $O$  on kameran projektiokeskus,  $p$  on kuvan pääpiste,  $n$  on kuvan nadiiripiste,  $l$  on pääpystysuoran ja todellisen horisontin leikkauspiste,  $v$  on kuvalla näkyvän horisontin ja pääpystysuoran leikkaus ja  $i$  on kuvan isosentripiste. [11]

## 2 Ideaalisen kuvan geometrisia piirteitä ja muunnoksia

### 2.1 Kameran projektiokeskus

Suurimman osan kameroista voidaan olettaa tuottavan keskusprojektiokuvia eli kaikki systeemiin tulevat säteet kohtaavat kameras projektiokeskuksessa ( $O$ ) (kuva 2). Keskusprojektiossa on epäjatkuvuuskohta ns. katoamistasossa, jolloin kohdepiste ei projisoidu kuvatasolle [7]. Katoamistaso on kuvatason suuntainen ja se kulkee projektiokeskuksen kautta. Jos tarkastellaan vain katoamistason ylä- tai alapuolella olevaa puoliavaruutta, keskusprojektiokuvaa voidaan kutsua perspektiivikuvaksi [7], [24]. Jos kuva on projisoitu pallopinnalle tason sijaan, ei synny katoamistasoa ja perspektiivikuva on jatkuva. Kameran projektiokeskuksen sijainti ja kuvakierto määrittävät kuvan ulkoisen orientoinnin.



Kuva 2. Kaikki säteet menevät kameras projektiokeskuksen ( $O$ ) kautta.

### 2.2 Kuvan pääpiste

Kameraoptiikan kuvausakselin ja kuvatason kohtisuoraa leikkauspistettä kutsutaan kuvan pääpisteeksi ( $p$ ) (kuva 1). Pääpiste ei välttämättä ole sama kuin kuvan keskipiste. Pääpisteen löytämiseksi on kehitelty useita eri menetelmiä, joista ehkä käytetyimmät ovat autokollimaatiomenetelmät, testikenttäkalibrointi sekä itsekalibrointi.

Laboratorio-olosuhteissa autokollimaattorilla löydettyä pääpistettä voidaan kutsua autokollimaatiopisteeksi (principle point of autocollimation) [24]. Autokollimaattori antaa yhdensuuntaisen sädekimpun linssisysteemiin. Pääpiste määrittyy, kun kameraan tulevat yhdensuuntaiset säteet ovat kohtisuorassa kuvatason nähden [24].

Testikenttäkalibroinnista saadaan kohteesta mitattujen tunnettujen pisteiden avulla laskettua ns. parhaan symmetrian pääpiste (principle point of best symmetry), joka on tarkoitettu käytettäväksi lähinnä linssivirheiden korjaamiseen yhteydessä [24]. Käytännössä, koska

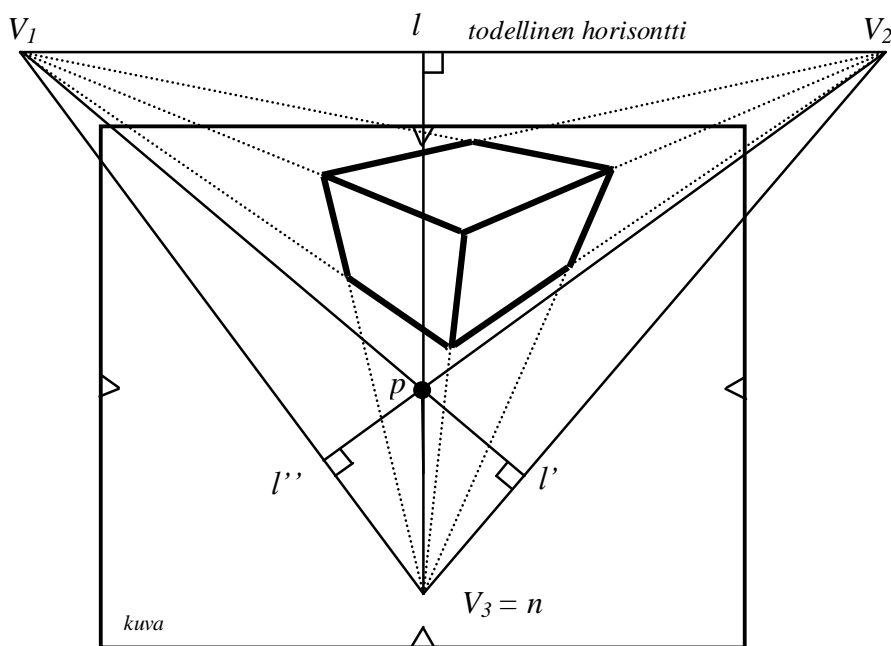
linssivirhettä esiintyy aina, parhaan symmetrian pääpiste on käytetyin pääpistetyyppi. Linssivirheiden korjaamisesta kerrotaan tarkemmin kappaleessa 3.1.

Itsekalibroinnissa ei tarvita lainkaan tunnettuja pisteitä maastosta. Kameralla otetaan kuvia samana pysyvistä näkymästä eri kuvauskulmista. Kohteessa olevien muuttumattomien piirteiden avulla voidaan selvittää kameran sisäiset parametrit. [23] Itsekalibrointimenetelmiä on useita erilaisia.

Pääpiste voidaan myös löytää kuvalla esiintyvien, kohteessa samansuuntaisten, taiteviivojen avulla. Samansuuntaisia taiteviivoja tarvitaan ortogonaalisesti kolmeen eri suuntaan. Jos taiteviivat ovat kohteessa ortogonaalisesti vaaka- sekä pystytasoissa, voidaan selvittää lisäksi horisontin ja nadiiripisteen sijainti. Samansuuntaiset taiteviivat kohtaavat pakopisteessä (kuva 3). Kuvan pääpiste ( $p$ ) yhtyy pakopisteiden  $V_1$ ,  $V_2$  ja  $V_3$  muodostaman pakopistekolmion ortosentriin eli korkeusjanojen leikkauspisteisiin (kuva 3) [16]. Pakopisteistä ja -suorista kerrotaan enemmän luvussa 3.1.

Eri menetelmillä saadut pääpisteet olisivat samat, jos kamerasysteemissä ei olisi virheitä. Virheiden takia näin ei kuitenkaan käytännössä ole. Menetelmien eroavuudet ja yhteensopivuus olisikin hyvä tutkimuksen aihe.

Perinteisissä kalibroituissa mittakameroissa pääpisteen sijainti on yleensä merkitty reunamerkkien avulla. Digitaalisilla kameroilla otetuissa kuvissa pääpiste on helppo ilmoittaa kuvan pikselikoordinaatteina, jolloin reunamerkkejä ei enää tarvita.



Kuva 3. Kuvan pääpiste ( $p$ ) yhtyy pakopisteiden  $V_1$ ,  $V_2$  ja  $V_3$  muodostaman pakopistekolmion ortosentriiniin eli korkeusjanojen leikkauspisteisiin. Kuvan tapauksessa pakopiste  $V_3$  on kuvanadiiri ( $n$ ). [16], [5], [21]

Kuvan 1 mukaan voidaan kuvan pääpisteelle löytää seuraavia yhteyksiä:

$$\overline{pv} = c \cdot \tan \theta_1 \quad (1)$$

$$\overline{pl} = c \cdot \tan \theta = \frac{c^2}{pn} \quad (2)$$

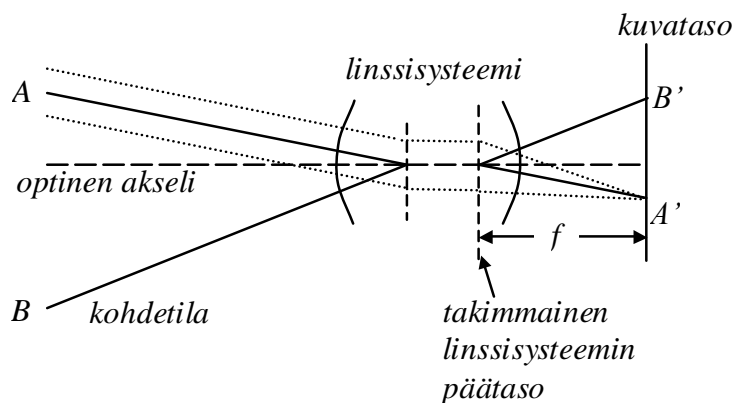
$$\overline{pi} = c \cdot \tan \frac{\nu}{2} \quad (3)$$

$$\overline{pn} = c \cdot \tan \nu = \frac{c}{\tan \theta} = \frac{c^2}{pl} \quad (4)$$

[11].

### 2.3 Kameravakio

Kameravakio ( $c$ ) on kamerasysteemin projektiokeskuksen ( $O$ ) ja kuvatasolla olevan pääpisteen ( $p$ ) välinen etäisyys. Projektiokeskuksesta pääpisteeseen vedetty suora on kohtisuorassa kuvatasoon nähden. Jos kamerasysteemissä ei olisi virheitä ja fokuointi olisi äärettömyyteen, kameravakio olisi sama kuin kamerasysteemin polttoväli ( $f$ ) [10]. Käytännössä kuitenkin virhettä aina on ja kameravakio onkin lähinnä laskennallinen kamerasysteemin kalibroinnista saatu suure ilman suoraa fysikaalista vastaavuutta (kalibrointimenetelmistä oli esittely kappaleessa 2.2). Fokusoimalla voidaan tarkentaa eri etäisyyksillä olevia kohteita, jolloin myös polttoväli ja kameravakio muuttuvat.



Kuva 4. Yksinkertaistettu linssijärjestelmän kaaviokuva. Samansuuntaiset säteet (esim. kohdeesta A) taittuvat linssijärjestelmän etummaisessa päätasossa optisen akselin suuntaiseksi. Takimmaisessa päätasossa säde taittuu siten, että kaikki samansuuntaiset säteet osuvat polttotasolla samaan pisteeseen. Optiseen akseliin osuvan tulo- ja lähtösäteiden tulisi olla samansuuntaisia. Polttoväli ( $f$ ) mitataan takimmaisesta linssisysteemin päätasosta fokus-tasolle. Ideaalisissa systeemeissä, jossa ei ole virhettä, polttoväli ( $f$ ) vastaa kameravakiota ( $c$ ). [9], [13]

Kameravakio voidaan kamerasysteemin laboratorio-, testikenttä tai itsekalibroinnin lisäksi ratkaista myös kohteesta näkyvien yhdensuuntaisten suorien avulla. Yhdensuuntaisten suorien avulla voidaan etsiä näkyvä horisontti ja pakopisteet (kappale 2.8). Pakopistekolmion koko määrittää kameravakion suhteessa kuvakoordinaatteihin. Kun muistetaan, että kamerasysteemin optinen akseli on kohtisuorassa kuvatasoon nähden ja kulkee pääpisteen kautta, voidaan kuvasta 3 lukea yhteyksiä:

$$\begin{aligned}
c &= \sqrt{(\overline{pl})(\overline{pn})} = \sqrt{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2} \\
c &= \sqrt{(\overline{pl})(\overline{pV_1})} = \sqrt{(x_0 - x_{V_1})^2 + (y_0 - y_{V_1})^2} \quad , \\
c &= \sqrt{(\overline{pl})(\overline{pV_2})} = \sqrt{(x_0 - x_{V_2})^2 + (y_0 - y_{V_2})^2}
\end{aligned} \tag{5 a,b,c}$$

missä  $(x_0, y_0)$  on kuvan pääpiste,  $(x_n, y_n)$  kuvan nadiiripiste ja  $(x_{V_1}, y_{V_1})$  sekä  $(x_{V_2}, y_{V_2})$  ovat horisontilla sijaitsevat katoamispisteet [11] [2] (kuva 3).

Tarkkuus paranee, kun otetaan näiden kolmen tuloksen keskiarvo. Lisäksi on löydettävissä kuvalta esimerkiksi seuraavia yhteyksiä (kuva 1):

$$c = \frac{\overline{pv}}{\tan \theta_1} \tag{6}$$

$$c = \frac{\overline{pl}}{\tan \theta} \tag{7}$$

$$c = \overline{il} \sin v = \overline{il} \cos \theta \tag{8}$$

$$c = \frac{\overline{pi}}{\tan \frac{v}{2}} \tag{9}$$

$$c = \frac{\overline{pn}}{\tan v} = \overline{pn} \tan \theta . \tag{10}$$

[11]

## 2.4 Todellinen ja näkyvä horisontti

Todellinen horisontti eli kuvahorisontti ei fyysisesti näy kuvalla, mutta on määritettävissä. Todellinen horisontti kuvalla on kameran projektiokeskuksen kautta kulkevan vaakasuoran tason ja kuvan välinen leikkaus (kuva 1).

Näkyvä horisontti on kuvatasolla alempana kuin todellinen horisontti ja voi osua kuva-alueelle, jos kuvan kallistuskulma on riittävän suuri. Näkyvä horisontti ei ole suora viiva vaan kaareva, koska maa on pyöreä. Todellisen ja näkyvän horisontin eron suuruus on riippuvainen kameran projektiokeskuksen korkeudesta. Poikkeaman horisonttien välille aiheuttaa maankaarevuus sekä refraktio eli säteen taipuminen ilmakehässä. Näistä on kerrottu enemmän kappaleissa 3.2 sekä 3.3.

Orientoinniltaan tunnetun kuvan todellisen horisontin yhtälö voidaan kirjoittaa:

$$(x - x_0)(r_{12}r_{23} - r_{22}r_{13}) + (y - y_0)(r_{21}r_{13} - r_{11}r_{23}) + c(r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22}) = 0, \tag{11}$$

joten suoran kulmakerroin on

$$k = -\frac{r_{12}r_{23} - r_{22}r_{13}}{r_{21}r_{13} - r_{11}r_{23}} = \tan \kappa . \tag{12}$$

Yhtälöissä  $r_{11} \dots r_{nm}$  ovat kolmiulotteisen kiertomatriisin elementtejä,  $(x_0, y_0)$  kuvan pääpiste,  $c$  on kameravakio ja  $\kappa$  on kuvakierto. [19]

Katoamissuoran yhtälö eli todellisen horisontin yhtälö voidaan saada myös asettamalla projektiivisen muunnoksen (kaava 28) tai kollineaarisuusyhtälöiden (kaava 32) nimittäjät nolliksi [1]:

## 2.5 Kameran suurin kallistus

Kameran suurin kallistus voidaan esittää joko todellisen horisontin suhteen ( $\theta$ ) tai sitten luotisuoran suhteen ( $\nu$ ). Vertailu tehdään aina kuvausakseliin nähden, joka on kuvassa 1 janan  $Op$  suuntainen. Näiden kahden kulman välillä pätee yhteys

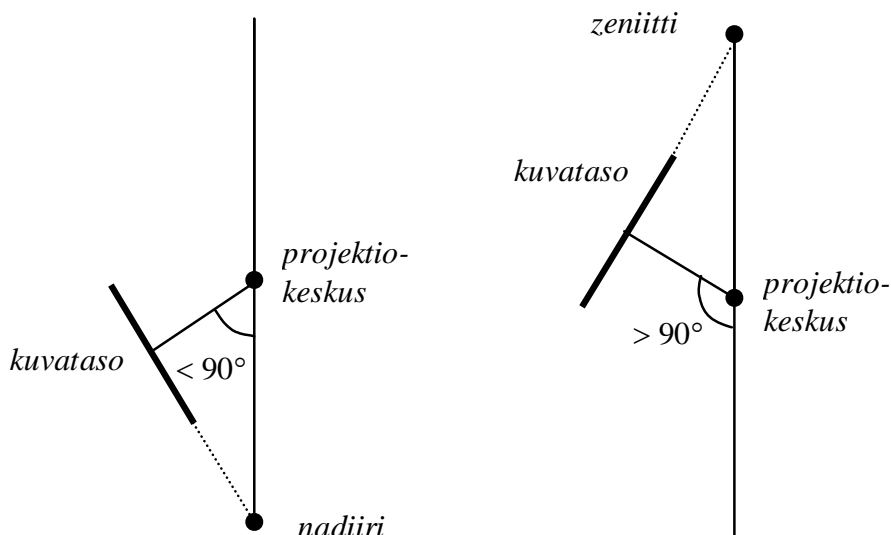
$$\nu = 90^\circ - \theta = 90^\circ - (\theta_1 + \theta_2). \quad (13)$$

## 2.6 Nadiiri- ja zeniittipisteet

Nadiiripiste ( $n$ ) on kuvatason ja kameras projektiokeskuksesta ( $O$ ) lähtevän luotisuoran leikkauspiste (kuvat 1 ja 5). Etäisyys kuvan pääpisteestä nadiiripisteeseen ( $\overline{pn}$ ) saadaan laskettua kaavasta (4) [11]. Nadiiripisteen etäisyys pääpystysuoran ja todellisen horisontin leikkauspisteeseen ( $l$ ) saadaan laskettua

$$\overline{nl} = \frac{c}{(\sin \theta) \cos(\theta)} = \frac{c}{(\sin \nu) \cos(\nu)} \quad (14)$$

[11].



Kuva 5. Nadiiri ja zeniitti.

Nadiiripistettä ei voida määrittää, jos kuvataso on kiertynyt vaakatasosta yli  $90$  astetta eli näkösäde on horisontin yläpuolella, koska kuvataso ei osu nadiiriin vaan zeniittiin (kuva 5).

Zeniitti on nadiiria vastaava piste, mutta kuvan projektiokeskuksen yläpuolella. Etäisyyslaskut pätevät sekä nadiirille että zeniitille. Jos kuvan ulkoinen orientointi on tunnettu, nadiiripisteen kuvakoordinaatit voidaan laskea kaavoista

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= -\frac{r_{31}}{r_{33}}c \\ y_n - y_0 &= -\frac{r_{32}}{r_{33}}c \end{aligned} \quad (15 \text{ a,b})$$

missä  $x_0, y_0$  on kuvan pääpiste,  $c$  on kameravakio ja  $r_{31}, r_{32}$  sekä  $r_{33}$  ovat kolmiulotteisen kiertomatriisin termejä [19].

Nadiiri- tai zeniittipiste on samalla yksi kolmesta pakopisteestä (vertaa kuvaan 3). Käytännössä kohteen kaikkien luoti- eli pystysuorien piirteiden suuntaisesti kulkevat suorat leikkaavat kuvatasolla nadiiri- tai zeniittipisteessä.

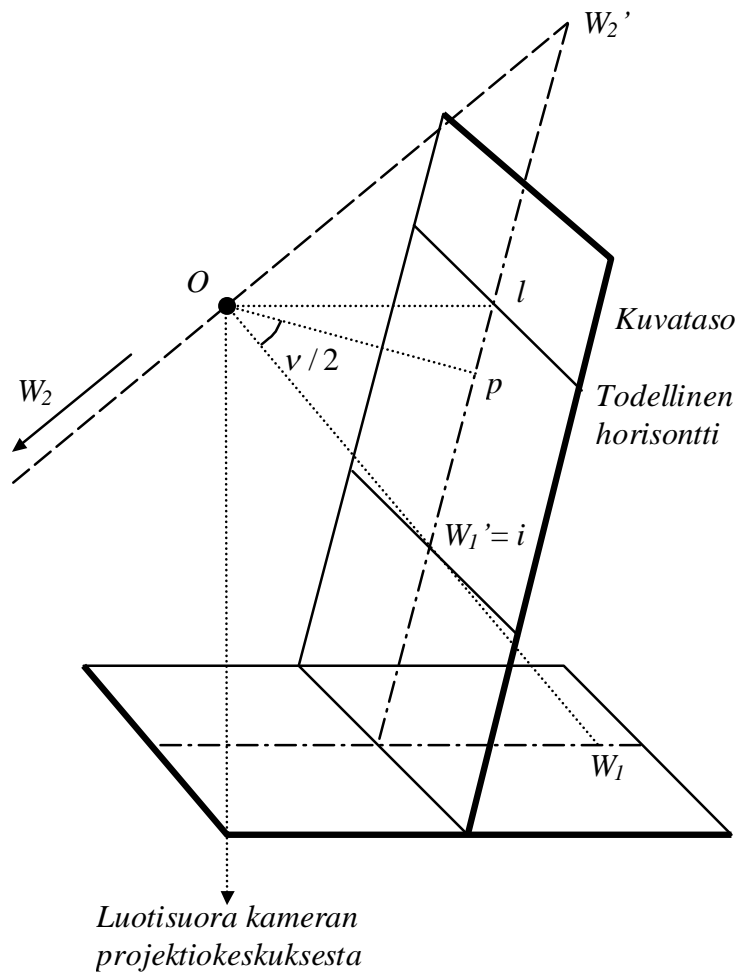
## 2.7 Isosentri

Perspektiivikuvalla ja maastossa vastinkulmat eivät yleensä ole saman suuruisia. Kuvatasolta on kuitenkin löydettävissä pääpystysuoralta kaksi pistettä, jossa kuva- ja kartta-projektiossa kulmat ovat samansuuruisia [16]. Näitä pisteitä kutsutaan isosentri- tai fokaalipisteiksi. Maastosta otetuilla valokuvilla sen sijaan isosentripiste on kulmatarkka vain, jos maasto on tasaista [19]. Isosentrin etäisyys pääpisteestä voidaan laskea kaavan (3) avulla [11]. Etäisyys todellisesta horisontista saadaan kaavasta [13]:

$$\bar{li} = c \left[ \tan \frac{v}{2} + \tan \theta \right] = c \sec \theta. \quad (16)$$

Mittakaava isosentripisteessä on sama kuin se olisi nadiirikuvalla, joka olisi otettu samalla kameralla samasta kuvauspaikasta (kaava 19) [13].

Aikoinaan isosentripiste on ollut käytännön mittausten kannalta tärkeä piste kuvatasossa. Esimerkiksi projektiivisen muunnoksen kertoimet (kaava 28) voidaan ratkaista sellaisten kaavojen avulla, joissa yhtenä oleellisena osana ovat erilaiset etäisyydet isosentripisteeseen [10, s. 730]. Vastaavalla tavalla isosentripisteen avulla voidaan selvittää viistokuvauksessa kohteen korkeus tai kuvauskorkeus, kunhan tunnetaan kuvakallistus. Isosentriprojektion avulla voidaan taas perspektiivikuvalla näkyvän kohteen nurkat projisoida samaan mittakaavaan, jolloin saadaan selville kohteen todellinen muoto (liite 4). Nämä ja muut vastaavat isosentripisteeseen perustuvat menetelmät ovat käytännössä kadonneet käytöstä muiden menetelmien kuten kollineaarisuusyhtälöiden (kaava 32) kehittämisen ja stereokuvamittausten yleistymisen ansiosta.



Kuva 6. Kuvatason pääpysysuoralta on löydettävissä kaksi kulmatarkkaa pistettä eli isosentriä  $W_1'$  ja  $W_2'$ .

## 2.8 Pakopisteet ja -suorat

Kollineaarisuusehdon mukaisesti kohteen suoran viivat kuvautuvat kuvalla myös suorina. Projektio on epäjatkuva, mutta yksikäsiteinen. Kollineaarisuusehto toteutuu myös käänteisesti, jos maasto on tasainen – muuten ei. Kaikki kohteessa yhdensuuntaiset suorat muodostavat projektiotasolla suoraviuhkan. Kaikki viuhkan suorat kohtaavat pakopisteessä (kuva 7). Kohteessa olevien yhdensuuntaisten suorien suunta ratkaisee, minkä tyyppisiä pakopisteitä niiden projektiot muodostavat. Kohteessa pystysuorat suorat kohtaavat kuvatasaalla nadiiri- tai zeniiittipisteessä. Kohteessa vaakasuorien suorien muodostamat pakopisteet sijaitsevat kuvahorisontilla. Sijainti riippuu suorien maastotasossa mitattavasta suuntakertoimesta ( $g = \tan \gamma$ ) ja voidaan kirjoittaa kuvan orientoinnin ollessa tunnettu muodossa [19]:

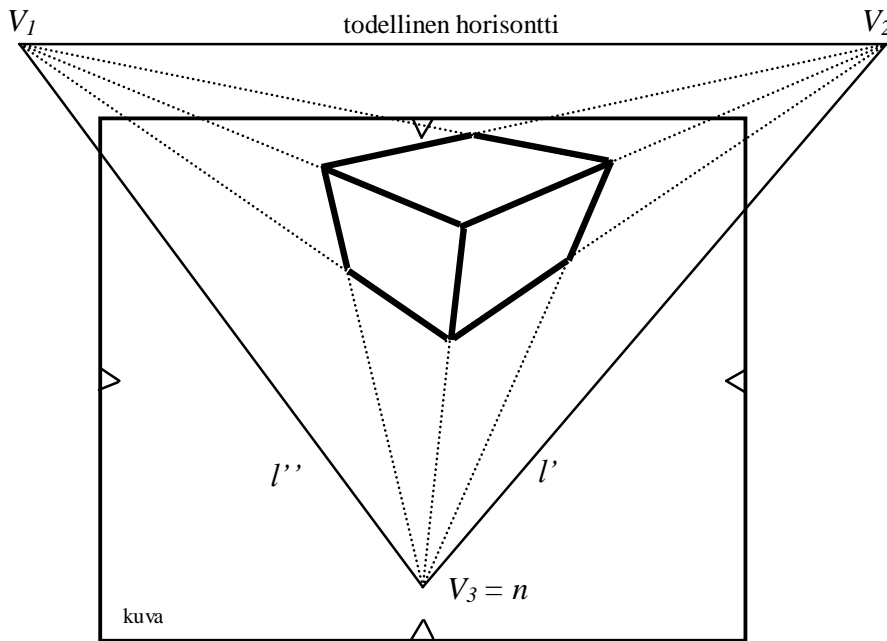
$$\begin{aligned} x_V - x_0 &= -\frac{r_{11} + r_{21}g}{r_{13} + r_{23}g} c \\ y_V - y_0 &= -\frac{r_{12} + r_{22}g}{r_{13} + r_{23}g} c \end{aligned}, \quad (17)$$

missä  $r_{11} \dots r_{mm}$  ovat kolmiulotteisen kiertomatriisin elementtejä,  $(x_0, y_0)$  kuvan pääpiste ja  $c$  on kameravakio. Eliminoimalla suuntakerroin  $g$  saadaan todellisen horisontin yhtälö kuvalla (kaava 11).

Nadiiripisteen kuvakoordinaatit voidaan laskea vastaavasti, jos kuvan orientointi on tunnettu [19]:

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= -\frac{r_{31}}{r_{33}} c \\ y_n - y_0 &= -\frac{r_{32}}{r_{33}} c \end{aligned}, \quad (18)$$

missä  $r_{31}, r_{32}$  ja  $r_{33}$  ovat kolmiulotteisen kiertomatriisin elementtejä,  $(x_0, y_0)$  kuvan pääpiste ja  $c$  on kameravakio.



Kuva 7. Kohteen samansuuntaiset suoraparvet yhtyvät pakopisteissä. [16], [5], [21]

Pakopisteiden käyttö sovelluksissa on ollut viime vuosina suosittu konenäön puolella kuin fotogrammetriassa. Suurin syy on se, että ilmakuvaukset tehdään tänä päivänä lähes yksinomaan pystykuvauksina. Pysty eli nadiirikuvauksen tapauksessa maaston yhdensuuntaisten suoraparvien pakopisteet sekä kuvahorisontti ovat kaukana kuva-alueelta ja kuvan pääpiste on lähellä nadiiripistettä. Kuvajärjestely aiheuttaa se, että pakopisteiden määrittäminen on epävarmaa. Luonnollisesti tällaisten epävarmojen pisteiden käyttö ei ole perus-

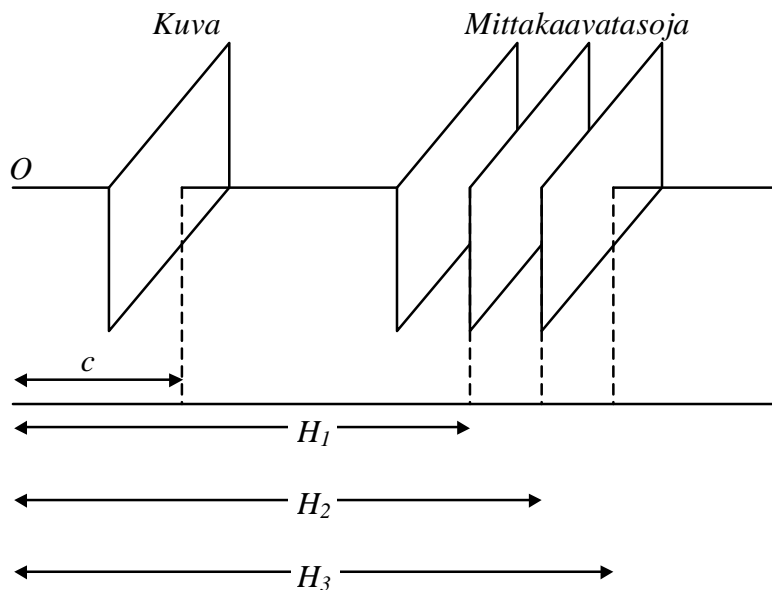
teltua. Viistokuvien tapauksessa ja lähifotogrammetriassa fotogrammetriset tutkimukset ovat pääasiassa keskittyneet stereokuvaukseen sen geometrisen vankkuuden takia. Yksittäisiltä kuvilta sen sijaan pakopisteiden ja -suorien avulla voidaan esimerkiksi selvittää kuvan orientointi ja kameravakio.

## 2.9 Mittakaava kuvalla

Mittakaavan tunteminen eri kohdissa kuvaa on yksi tärkeimpiä asioita tehtäessä mittauksia yksittäisiltä kuvilta. Mittakaava säilyy samana optista akselia kohtisuoraan tietyllä etäisyydellä olevan tason sisällä. Mittakaavan suuruus riippuu kameravakiosta ja mittakaavatason etäisyydestä projektiokeskukseen (kuva 8). Pystykuvauksessa mittakaava kuvan eri puolilla on sama, jos maasto olisi tasaista. Sen sijaan viistokuvalla mittakaava vaihtelee jatkuvasti pitkin kuvaa. Kuvan mittakaavaluku  $m$  on helppo määrittää, jos kohde on kuvatason suuntainen, kuten esimerkiksi nadiiri- eli pystykuvauksen tapauksessa (tasaiselle maastolle):

$$m = \frac{H}{c}, \quad (19)$$

missä  $c$  on kameravakio ja  $H$  on kohteen etäisyys kameran projektiokeskuksesta.

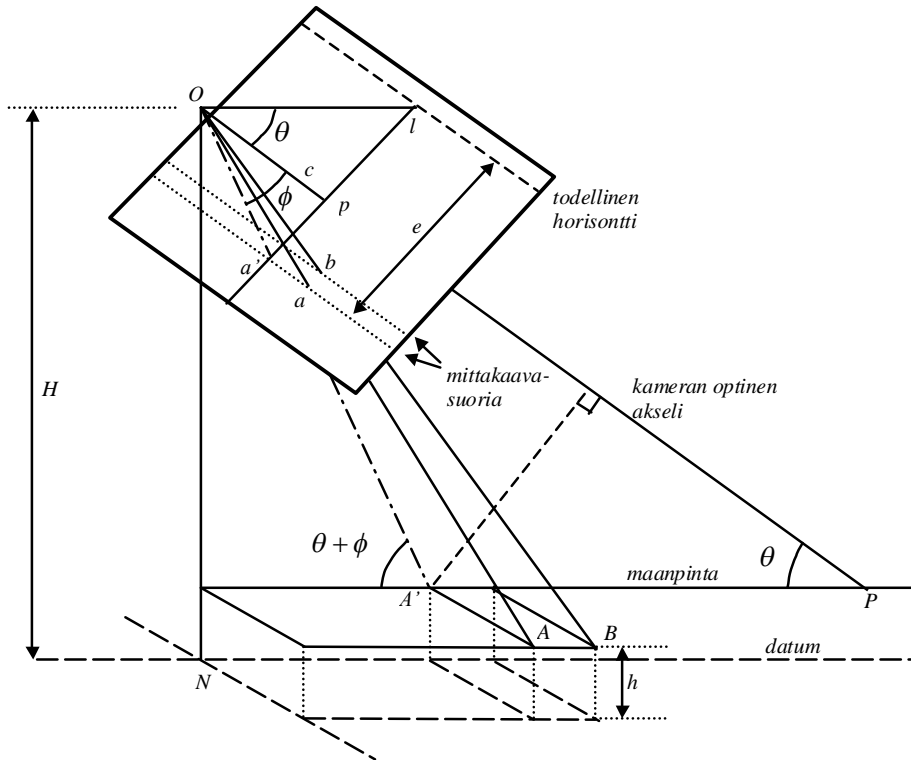


Kuva 8. Mittakaava on aina sama kuvatason suuntaisen tietyllä etäisyydellä olevan tason sisällä. Mittakaavan suuruus riippuu kameravakiosta  $c$  ja kohteen etäisyydestä  $H$

Viistokuvan tapauksessa tilanne on hieman hankalampi mittakaavan muuttuessa jatkuvasti pitkin kuvaa, koska kohteita saattaa olla sekä lähellä että hyvin kaukana horisontissa. Mittakaava kuitenkin säilyy millä tahansa suoralla, joka on kuvalla todellisen horisontin suuntainen (kuva 9). Mittakaavaluku tällaisella suoralla on määritettävissä kaavalla [13], [22]:

$$m_x = \frac{(H-h)\cos\phi}{c\sin(\theta+\phi)} = \frac{H-h}{e\cos\theta}, \quad (20)$$

missä  $H$  on lentokorkeus,  $h$  on kohteen maastokorkeus,  $\theta$  on kuvan kallistus,  $c$  on kameravakio,  $\phi$  on todellisen horisontin suuntaisen mittakaavasuuron etäisyys kuvan pääpisteestä ja  $e$  on mittakaavasuuron kuvaalta mitattu etäisyys todellisesta horisontista.



Kuva 9. Mittakaava säilyy samana todellisen horisontin suuntaisilla suorilla. Muun suuntaisilla suorilla mittakaava vaihtuu jatkuvasti. [22]

## 2.10 Kollineaarisuus, kaksoissuhde ja yksiulotteinen projektiivinen muunnos

Keskusprojektiokuvien tärkeä ominaisuus on, että kohteessa näkyvän suoran viivan projektiio kuvalla on myös suora viiva [16]. Sama pätee myös kääntäen eli kuvalla näkyvä suora viiva vastaa tasaisessa maastossa suoraa viivaa. Sanaa kollineaarisuus käytetäänkin kuvaamaan sitä, että projektiivisissä tasokuvioissa suorat vastaavat toisiaan. Käytännössä korjaamattomilla kuvilla kollineaarisuus ei kuitenkaan toteudu esimerkiksi linssin piirtovirheiden takia, joista kerrotaan lisää kappaleessa 3.1.

Kollineaarisuuden perusteella voidaan siis verrata kohteen ja kuvan suoria viivoja keskenään. Keskusprojektiossa janojen jakosuhte ei kuitenkaan säily (kuva 10), joten joudutaan etsimään hieman monimutkaisempia yhteyksiä. Ratkaisu on ns. kaksoissuhde, jonka arvo säilyy keskusprojektiossa. Kaksoissuhteen voidaan sanoa olevan projektiivinen invariantti [16]. Kuvasta 10 voidaan lukea seuraavat kolmioiden kaksinkertaiset pinta-alat [16]:

$$\begin{aligned}
AC \cdot H &= OA \cdot OC \cdot \sin(AOC) \\
AD \cdot H &= OA \cdot OD \cdot \sin(AOD) \\
BC \cdot H &= OB \cdot OC \cdot \sin(BOC) \\
BD \cdot H &= OB \cdot OD \cdot \sin(BOD)
\end{aligned} \tag{21}$$

Yhtälöissä esim. merkintä  $AOC$  tarkoittaa janojen  $OA$  ja  $OD$  välistä kulmaa. Pisteiden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  kaksoissuhde voidaan nyt supistaa:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(AOC)}{\sin(BOC)} : \frac{\sin(AOD)}{\sin(BOD)} = \text{vakio}. \tag{22}$$

[16], [3]

Lauseke siis riippuu vain säteiden välisistä kulmista! Kuvasta 10 on nähtävissä, kuinka tämän perusteella sama kaksoissuhde toimii myös kuvapisteille  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ja  $D'$ . Nyt voidaan kirjoittaa [3]:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \text{vakio}. \tag{23}$$

Yksiulotteisessa tapauksessa voidaan merkitä pisteiden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  koordinaatteja merkinnöillä  $x_A, x_B, x_C$  ja  $x_D$ , sekä pisteiden  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ja  $D'$  koordinaatteja  $x'_A, x'_B, x'_C$  ja  $x'_D$ . Nyt voidaan kaksoissuhde kirjoittaa auki [3]:

$$\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{x'_C - x'_A}{x'_C - x'_B} : \frac{x'_D - x'_A}{x'_D - x'_B}. \tag{24}$$

Jos ratkaistaan yhtälö  $x_D$  :n suhteen, saadaan lineaarinen murtofunktiio

$$x_D = \frac{a_1 x'_D + b_1}{a_2 x'_D + b_2}, \tag{25}$$

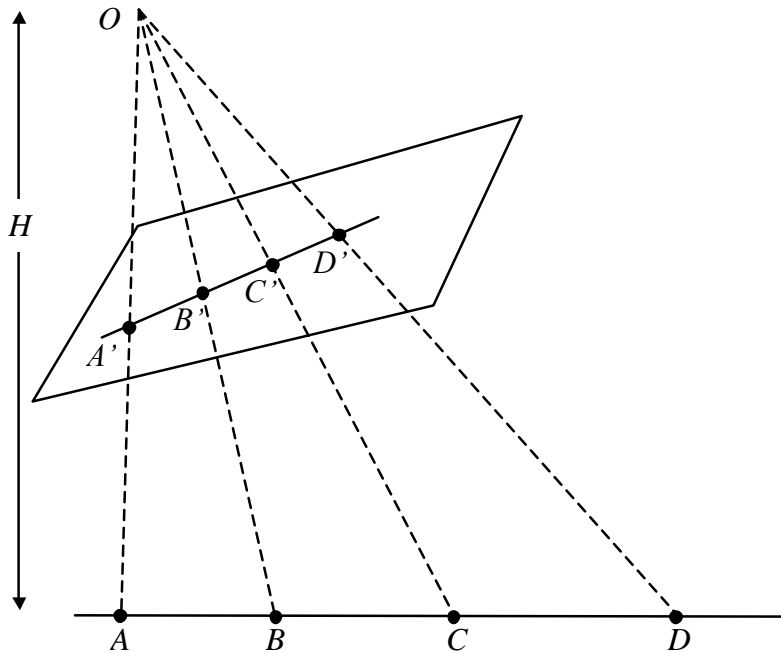
missä parametrit  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ovat kolmen tunnetun koordinaatin pitkäköjä funktioita. Parametrien determinantti ei saa olla nolla, jotta muunnos olisi myös kääntäen mahdollinen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{26}$$

Determinanttiehdon mukaan jompikumpi parametreista  $a_2, b_2 \neq 0$ , joten yhtälö voidaan jakaa jommallakummalla parametrilla. Yhtälö kirjoitetaan yleensä yleisessä muodossa:

$$X = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + 1}. \tag{27}$$

Kertoimet  $a_1, a_2$  ja  $b_1$  ovat ratkaistavissa, jos suoralta tunnetaan kolme pistettä. Yhtälö on lineaarinen ja muunnos olettaa sekä kuvan, että kohteen olevan tasainen. [16], [3], [10]



Kuva 10. Kohteessa oleva suora viiva kuvautuu keskusprojektiossa olevalla kuvalla suoraksi viivaksi. Projektiiviset tasokuvat ovat kollineaarisia. [16]

## 2.11 Kaksiulotteinen projektiivinen muunnos

Edellisessä kappaleessa esitetty yksiulotteinen projektiivinen muunnos voidaan laajentaa kaksiulotteiseksi projektiiviseksi muunnokseksi. Muunnos olettaa maaston olevan taso, joten kaavan käyttö maastokuvauksissa ei ole perusteltua. Sen sijaan se sopii kuvatason projisoimiseen toiseen asentoon tai suoriin projektiioihin kartan kanssa. Kaksiulotteisen projektiivisen muunnoksen lineaariset yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a_1'x + b_1'y + c_1'}{a_3'x + b_3'y + c_3'} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + 1} \\ Y &= \frac{a_2'x + b_2'y + c_2'}{a_3'x + b_3'y + c_3'} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + 1} \end{aligned} \quad (28)$$

Parametrien determinantti ei saa olla nolla, jotta käänteismuunnos olisi myös mahdollinen:

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} \neq 0. \quad (29)$$

Yhtälö voidaan jakaa jollain parametreista  $a_3', b_3'$  tai  $c_3'$ , koska ne kaikki eivät saa olla nollia determinanttiehdon mukaisesti [16]. Tapausta, jossa determinantti olisi nolla, kutsutaan

singulaariseksi. Yleensä yhtälöt jaetaan  $c_3'$ :lla, kuten kaavassa 28. Kaksiulotteinen projektiivinen muunnos on ehkä helpointa johtaa seuraavassa kappaleessa esitettävistä kollineaarisuusyhtälöistä olettamalla maasto tasoksi. Tällä perusteella onkin löydettävissä seuraavia yhteyksiä projektiivisen muunnoksen ja kuvan orientointisuureiden välille:

$$\begin{aligned}
a_1' &= X_0 r_{31} - Z_0 r_{11} \\
b_1' &= X_0 r_{31} - Z_0 r_{12} \\
c_1' &= Z_0 (r_{11} x_0 + r_{12} y_0 + r_{13} c) - X_0 (r_{31} x_0 + r_{32} y_0 + r_{33} c) \\
a_2' &= Y_0 r_{31} - Z_0 r_{21} \\
b_2' &= Y_0 r_{31} - Z_0 r_{22} \\
c_2' &= Z_0 (r_{21} x_0 + r_{22} y_0 + r_{23} c) - Y_0 (r_{31} x_0 + r_{32} y_0 + r_{33} c) \\
a_3' &= r_{31} \\
b_3' &= r_{32} \\
c_3' &= -r_{31} x_0 - r_{32} y_0 - r_{33} c,
\end{aligned} \tag{30}$$

missä  $r_{11} \dots r_{33}$  ovat kolmiulotteisen kiertomatriisin elementtejä,  $(x_0, y_0)$  kuvan pääpiste,  $c$  on kameravakio ja  $(X_0, Y_0$  ja  $Z_0)$  projektiokeskuksen koordinaatit kohdekoordinaatistossa [15]. Jakolaskun johdosta pätevät seuraavat yhteydet kertoimille:

$$a_1 = \frac{a_1'}{c_3'}, b_1 = \frac{b_1'}{c_3'}, \text{ jne.} \tag{31}$$

Kaksiulotteisen projektiivisen muunnoksen parametrit voidaan etsiä myös tunnettujen pisteiden avulla. Parametrit ratkeavat, jos tunnetaan neljän pisteen kohde- ja kuva-koordinaatit.

## 2.12 Kollineaarisuusehto ja -yhtälöt

Kollineaarisuusehdon mukaan projektiokeskus, kuvapiste ja kohdepiste sijaitsevat samalla suoralla [15]. Kollineaarisuusehtoon perustuvat kollineaarisuusyhtälöt, joiden avulla on mahdollista ratkaista useat fotogrammetriset tehtävät. Käytännön tehtävissä on kuitenkin muistettava korjata kovalta linssivirheet, koska niiden takia kollineaarisuusehto ei toteudu korjaamattomilla kuvilla.

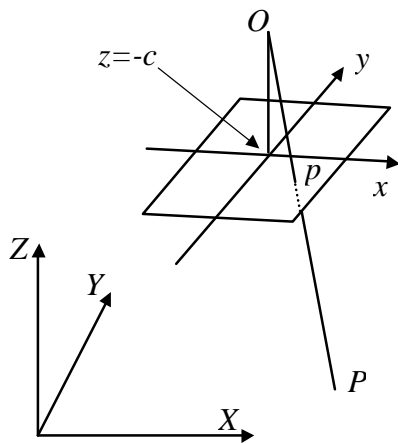
Kollineaarisuusyhtälöiden avulla voidaan tehdä muunnos kohteesta kuvalle [19]:

$$\begin{aligned}
\frac{x - x_0}{z - z_0} &= \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \\
\frac{y - y_0}{z - z_0} &= \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}
\end{aligned} \tag{32 a}$$

sekä kääntäen kovalta kohteen avaruussuoralle:

$$\begin{aligned} \frac{X - X_0}{Z - Z_0} &= \frac{r_{11}(x - x_0) + r_{12}(y - y_0) + r_{13}(z - z_0)}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)} \\ \frac{Y - Y_0}{Z - Z_0} &= \frac{r_{21}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) + r_{23}(z - z_0)}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)} \end{aligned} \quad (32 \text{ b})$$

Yhtälöissä  $r_{11} \dots r_{33}$  ovat kiertomatriisin elementit,  $(X_0, Y_0, Z_0)$  kameran projektiokeskuksen koordinaatit,  $(X, Y, Z)$  maastopiste,  $(x_0, y_0)$  kuvan pääpiste,  $(x, y)$  kuvapiste ja  $(z - z_0)$  on kameravakio\*(-1) (= -c). Kiertomatriisista kerron tarkemmin toisessa erikoistyössäni ”Kiertomatriisi” [17]. Kollineaarisuusyhtälöt eivät ole lineaarisia.



Kuva 11. Kollineaarisuusehdon mukaan projektiokeskus ( $O$ ), kuvapiste ( $p$ ) ja kohdepiste ( $P$ ) ovat samalla suoralla.

### 3 Kuvien geometriset korjaukset

Laskuissa tulee ottaa huomioon korjauksia kuvien geometriaan, jotta voitaisiin käyttää teoreettisia perspektiivikuvan yhtälöitä. Tärkeimmät korjaukset ovat linssivirhe-, maankaarevuus sekä refraktiokorjaukset.

#### 3.1 Linssivirheiden korjaus

Linssivirheet aiheuttavat sen, että projektiivisen geometrian mukainen kollineaarisuus ei säily eli kohteen suorat viivat eivät ole suorilla kuvalla. Korjaamalla virheet pyritään mahdollisimman lähelle virheetöntä keskusprojektiokuvaa, jotta laskukaavat pätsivät. Amatöörikameroissa linssivirheet saattavat olla niin huomattavia, että ne haittaavat jo visuaalisen vaikutelman (kuva 3). Mittakameroissa esiintyy aina jonkin verran linssivirheitä. On selvää, että linssivirheet heikentävät merkittävästi kuvien mittaustarkkuutta. Viistokuvissa linssivirheiden vaikutus on vielä korostuneempi kuin pystykuvissa, koska lähellä horisonttia mittakaava on niin pieni, että pienetkin havaintovirheet aiheuttavat suuria maastovirheitä.

Linssivirheet voidaan jakaa kahteen pääryhmään: tangentialiseen ja radiaaliseen piirtovirheeseen. Tangentialinen piirtovirhe johtuu yleensä linssien asennusvirheistä, kun lins-

sien optiset akselit eivät olekaan tarkalleen yhdensuuntaisia. Radiaalinen piirtovirhe syntyy linssin taittaessa tai suurentaessa valonsädettä reunoilla eri tavoin kuin keskellä. Radiaalinen piirtovirhe yhden linssin tapauksessa on matemaattisen optiikan ominaisuus, koska kuvan terävyys ja radiaalinen piirtovirhe ovat osittain vastakkaisia vaatimuksia [4]. Useamman linssin järjestelmällä voidaan piirtovirhe saada kuitenkin hyvin pieneksi. Radiaalinen piirtovirhe  $\Delta r$  voidaan korjata kaavalla

$$\Delta r = A_1 r^3 + A_2 r^5 + A_3 r^7 + \dots, \quad (33)$$

missä  $A_1 - A_n$  ovat kameran kalibroinnista saatavia parametreja ja  $r$  on tarkasteltavan pisteen etäisyys kuvan pääpisteestä. [20] Radiaalinen piirtovirhe jakaantuu koordinaattiakselien kesken sen mukaan, mikä on kohdepisteen  $(x, y)$  ja kuvan pääpisteen  $(x_0, y_0)$  kautta kulkevan suoran ja vaakapääsuoran välinen kulma. Kulmaa laskettaessa täytyy tarkistaa, että tulos on halutussa neljänneksessä. Muuten korjausten etumerkit menevät väärin.

$$\Delta x = \Delta r \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta r \sin \alpha, \quad \alpha = \arctan \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (34)$$

Tangentiaalisen piirtovirheen vaikutus kuvakoordinaatteihin on

$$\Delta x = (P_1(r^2 + 2x^2) + 2P_2xy)(1 + P_3r^2 + P_4r^4 + \dots) \quad (35)$$

$$\Delta y = (2P_1xy + P_2(r^2 + 2y^2))(1 + P_3r^2 + P_4r^4 + \dots)$$

[20]

Radiaalisen piirtovirheen vaikutus on yleensä huomattavasti suurempi kuin tangentiaalisen piirtovirheen. Usein riittääkin pelkän radiaalisen piirtovirheen huomioiminen. Linssivirheidensä kohdalla on lisäksi huomattava, että virheet ovat riippuvaisia kameran polttovälistä. Kameran polttovälin vaihtuminen zoomatessa muuttaa myös linssivirheitä.



Kuva 12. Vasemmalla on digitaalisella kameralla otettu kuva, josta ei ole poistettu linssivirheitä. Tarkastelemalla seinä- ja ikkunanpuitelinjoja on helppo havaita vääristymiä. Oikealla olevasta kuvasta on poistettu radiaalinen piirtovirhe.

### 3.2 Maankaarevuus

Fotogrammetriset projektiiviset yhtälöt olettavat maanpinnan tasoksi suorakulmaisessa Euklidisessä avaruudessa, eivätkä ellipsoidiksi tai ellipsoidin karttaprojektioksi, johon on liitetty korkeustieto [6]. Pienillä etäisyyksillä tästä ei aiheudu suuria virheitä, mutta kaukana

oleville kohteille vaikutus voi olla suuri. Teoreettisesti pitäisi olla selvillä karttaprojektion tai geodeettisen koordinaattijärjestelmän ja fotogrammetrisen mittaustason välinen muunnos, jotta saavutettaisiin paras mahdollinen lopputulos. Lisäksi käytetyt korkeusjärjestelmät saattavat poiketa paikallisesti toisistaan. Erikoistyössäni on kuitenkin käytetty vain likimääräisiä ratkaisuja maankaarevuuden korjaamiseksi, koska erilaisten geodeettisten järjestelmien ja projektioalgoritmien selvittäminen laajentaisi työtä liikaa.

### 3.2.1 Maankaarevuuden vaikutus

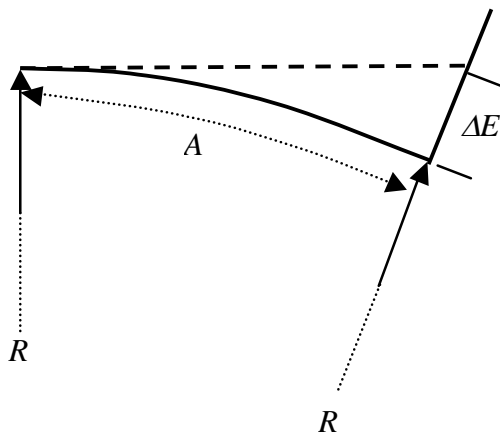
Maankaarevuuden vaikutus  $\Delta E$  voidaan laskea likimäärin kohteen etäisyyden avulla:

$$\Delta E \approx \frac{A^2}{2} R, \quad (36)$$

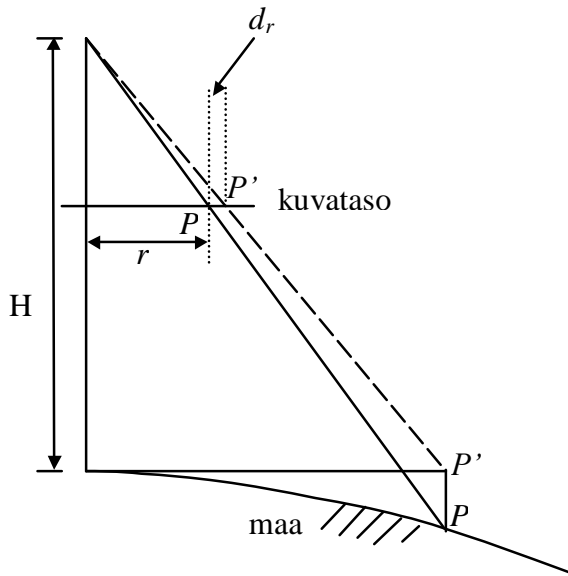
missä  $A$  on kohdepisteen ja lähtöpisteen välinen etäisyys pitkin maanpintaa ja  $R$  on maan säde (kuva 13). [8] Vaikutus suoraan pystykuvahavaintoihin (kuva 14) voidaan laskea kaavasta:

$$d_r = \frac{r^3 H}{2c^2 R}, \quad (37)$$

missä  $r$  on näkyvän pisteen etäisyys pääpisteestä,  $H$  on kameran projektiokeskuksen korkeus,  $c$  on kameravakio ja  $R$  on maan säde [12]. Korjauksen suunta on kohti nadiiria. Tällaista radiaalista korjausta ei voi tehdä viistokuvalle, vaan korjaus on riippuvainen kuvan kallistuksesta.



Kuva 13. Maankaarevuuden vaikutus etäisyydellä  $A$  olevaan kohteeseen. [8]



Kuva 14. Maankaarevuuden vaikutus pystykuvauksessa kuvahavaintoihin. [12]

Pystykuvilla maankaarevuus korjataan säteittäisesti kuvan pääpisteeseen nähden, jolloin voidaan käyttää samoja yhtälöitä kuin linssivirheiden korjaamisessa (kaava 34). Viistokuvilla maankaarevuus on korjattava säteittäisesti kuvan nadiiripisteeseen nähden. Yhtälöt esitetään kappaleessa 3.3.2 (kaava 54).

### 3.2.2 Maankaarevuuden vaikutus horisontissa

Kaikkein suurimman vaikutuksen maankaarevuus aiheuttaa horisontissa. Kappaleessa 2.4 esiteltiin termit todellinen ja näkyvä horisontti. Maankaarevuus on merkittävin tekijä näiden kahden horisonttityypin välisessä poikkeamassa. Likiarvoinen maankaarevuuden aiheuttama kulma  $\theta_m$  horisonttien välille (kuva 15) saadaan **radiaaneina** kaavasta

$$\theta_m = \arctan \frac{\sqrt{2RH + H^2}}{R}, \quad (38)$$

missä  $R$  on maan säde ja  $H$  on kameran korkeus. Kulmaa  $\theta_m$  vähennettynä refraktion vaikutuksella merkitään usein myös symbolilla  $d$  (dip angle) (kulma  $\theta_2$  kuvassa 1). Kaava on johdettavissa kuvan 15 mukaisesta geometriasta:

$$\tan \theta_m = \frac{\overline{LZ'}}{R}, \quad (39)$$

missä

$$\overline{LZ'} = \sqrt{(R + H')^2 - R^2}. \quad (40)$$

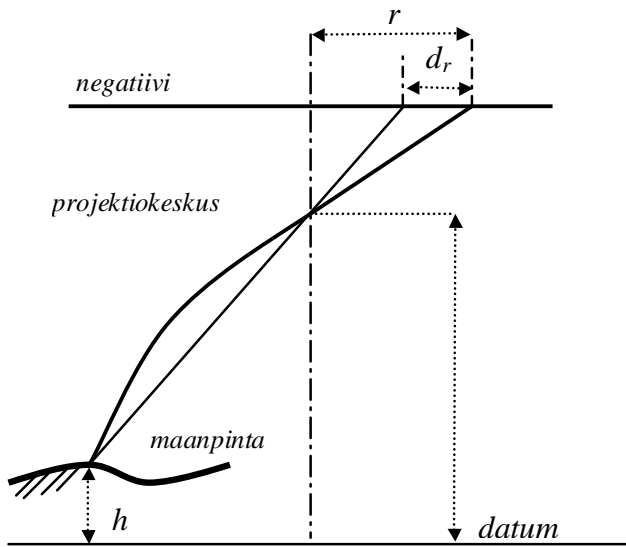
Koska kulma  $\theta_m$  on radiaaneina aina pieni ja  $H$  on paljon pienempi kuin  $R$ , kaava voidaan kirjoittaa likimäärin



vuonna 1959 kehittämän ilmakehämallin mukainen ja on suunniteltu sen mukaan, että valonsäde kulkisi 45 asteen kulmassa ilmakehän läpi. Korjaus kuvan x- ja y-koordinaatteihin saadaan laskettua

$$\begin{aligned} d_{rx} &= \frac{d_r}{r} x \\ d_{ry} &= \frac{d_r}{r} y \end{aligned} \quad (44)$$

[8], [14], [12], [18]



Kuva 16. Vaakakuvauksessa tapahtuva kuvaussäteen taipuminen ilmakehässä [8].

### 3.3.2 Refraktiokorjaus sekä pysty- että viistokuville

Gyer esittää mallin refraktiokorjaukselle, joka toimii sekä pysty- että vaakakuvauksissa [19]. Pystykuvauksille tarkoitetuissa malleissa tarkkuus ei enää ole riittävä yli 60 asteen kulmissa. Gyerin mallissa valonsäteiden zenittikulma voi olla nollan ja 90 asteen välillä ja ilmakehä oletetaan muodostuvan pallomaisista kerroksista. Kameran ja kohteen välisiä suhteita esitetään polaarikoordinaateissa. Refraktiokulma (katso kuva 17) voidaan laskea kaavalla

$$\tan R_c = \frac{\tan \zeta_c \left\{ \left( \frac{r_c}{r_g} \right) - \cos \beta_c \right\} - \sin \beta_c}{\tan \zeta_c \sin \beta_c + \left( \frac{r_c}{r_g} \right) - \cos \beta_c}, \quad (45)$$

missä  $\zeta_c$  on taipuneen valonsäteiden zenittikulma kameran polttopisteessä,

$$r_c = r_e + h_c \quad (46)$$

$$r_g = r_e + h_g \quad (47)$$

$$\beta_c = \int_{r_g}^{r_c} \frac{1}{r} \tan \zeta \, dr = \int_{h_g}^{h_c} \frac{1}{r} \frac{\sin \zeta}{\cos \zeta} \, dr = \int_{h_g}^{h_c} \frac{k}{r \sqrt{n^2 r^2 - k^2}} \, dr. \quad (48)$$

Kaavoissa  $r_e$  on maan säde,  $\zeta$  on taipuneen valonsäteen zeniittikulma missä tahansa valonsäteellä kohteen ja kameran projektiokeskuksen välissä,  $h_c$  on kameran korkeus,  $h_g$  on kohteen korkeus,  $dr = d(r_e + h) = dh$ ,  $\beta_c$  on kulma kohteesta maan keskipisteen kautta kameran projektiokeskukseen sekä

$$n = 1 + 0.000078831 \frac{p}{T} - \frac{0.000011036 e}{T}. \quad (49)$$

$T$  on lämpötila kelvineinä ( $^{\circ}K$ ) ja  $p$  on paine millibaareina. Yhtälön jälkimmäinen termi voidaan jättää huomiotta, koska sen vaikutus on niin pieni ( $e$  on osittainen kaasupaine millibaareina). Vakio  $k$  tulee ympyrämäisesti kerrostuneeseen ainekseen sovelletusta Snellin laista:

$$nr \sin \zeta = n_c r_c \sin \zeta_c = n_g r_g \sin \zeta_g = k = \text{vakio} \quad (50)$$

Kulman  $\beta_c$  laskemisessa tarvittava integraali voidaan ratkaista numeerisin menetelmin. Integroitava alue jaetaan riittävän pieniin osaintegraaleihin:

$$\int_{h_g}^{h_c} \frac{k}{r \sqrt{n^2 r^2 - k^2}} \, dh \approx \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{k}{r \sqrt{n_i^2 r^2 - k^2}} \, dh = \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{\frac{k}{n_i}}{r \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{n_i}\right)^2}} \, dh, \quad (51)$$

missä

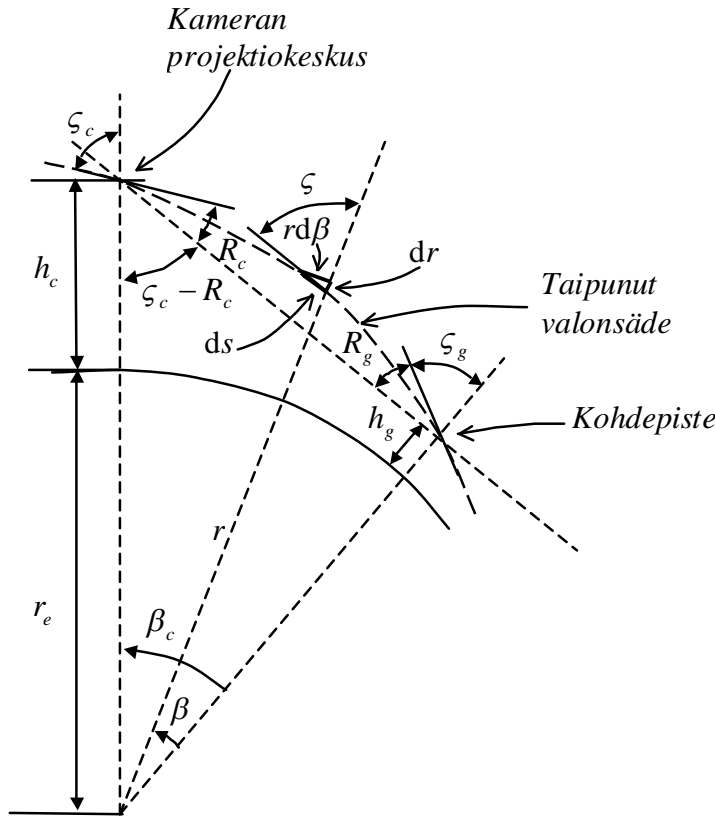
$$h_i = h_g + (i-1) \frac{h_c - h_g}{m-1}. \quad (52)$$

Jos vielä oletetaan  $n$ :n olevan vakio jokaisessa integrointivälissä, voidaan integraali ratkaista:

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{\frac{k}{n_i}}{r \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{n_i}\right)^2}} \, dh = \sum_{i=1}^{i=m-1} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{k}{n_i r} \right) \Big|_{h_i}^{h_{i+1}} \right\} = \sum_{i=1}^{i=m-1} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{k}{n_i r_{i+1}} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{k}{n_i r_i} \right) \right\}. \quad (53)$$

Numeerinen menetelmä on riittävän tarkka, kunhan osaintegraalien integrointivälit valitaan riittävän pieniksi.

Ilmakehän refraktiokorjaus voidaan tehdä myös karteesisissa koordinaateissa tässä esitetyn polaarikoordinaatiston sijaan. Tällöin Gyer olettaa ilmakehän muodostuvan tasomaisista kerroksista [19]. Jos kuvauksen kallistus on yli 60 astetta, Gyer kuitenkin suosittelee tässä esitettyä menetelmää. Refraktion vaikutusta korjattaessa kovalta on ensin syytä poistaa linssivirheiden aiheuttamat virheet (kappale 3.1).



Kuva 17. Taipuneen säteen geometriaa pallomaisesti kerrostuneen ilmakehän tapauksessa. [19]

Refraktion vaikutus kuvalla on säteittäinen suhteessa kuvan nadiiripisteeseen. Korjaukset kuvakoordinaatteihin voidaan tehdä seuraavasti (kuva 18) [19]:

$$x_{\text{korjattu}} = x_{\text{havaittu}} - \frac{x_n - x_{\text{havaittu}}}{a} \delta a \quad (54 \text{ a})$$

$$y_{\text{korjattu}} = y_{\text{havaittu}} - \frac{y_n - y_{\text{havaittu}}}{a} \delta a, \quad (54 \text{ b})$$

missä

$$\delta a = a - \frac{b \sin(\zeta_c - R_c)}{\sin(\alpha + \zeta_c - R_c)}, \quad (55)$$

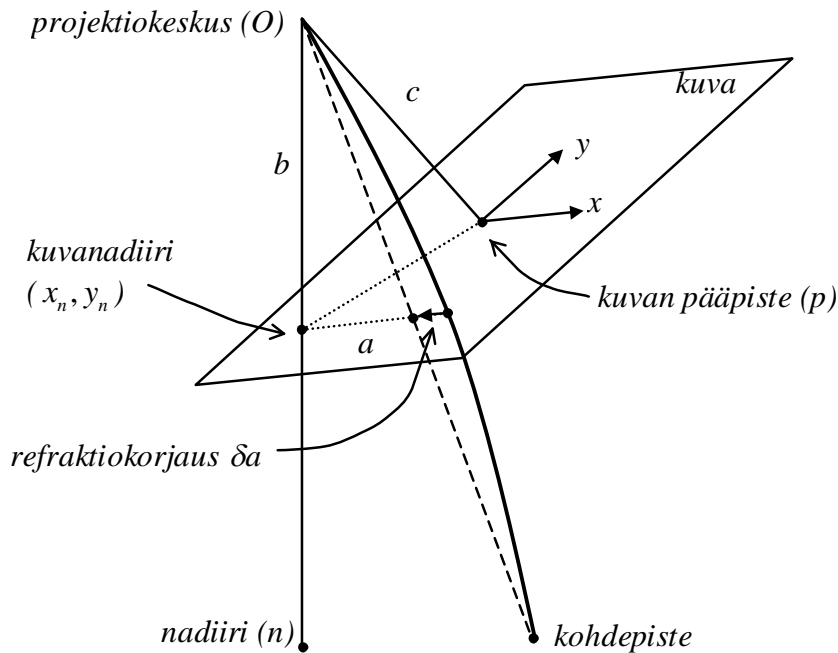
$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{x_n (x_n - x_{\text{havaittu}}) + y_n (y_n - y_{\text{havaittu}})}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + c^2} \sqrt{(x_n - x_{\text{havaittu}})^2 + (y_n - y_{\text{havaittu}})^2}} \right), \quad (56)$$

$$a = \sqrt{(x_n - x_{\text{havaittu}})^2 + (y_n - y_{\text{havaittu}})^2}, \quad (57)$$

sekä

$$b = \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + c^2}. \quad (58)$$

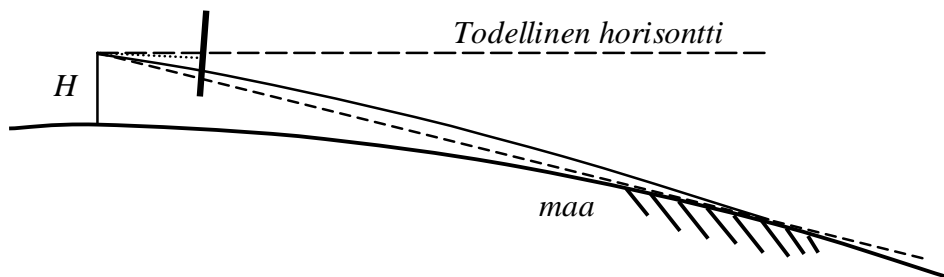
Kuvan nadiiripiste  $(x_n, y_n)$  on laskettavissa kaavan 18 avulla ja  $c$  tarkoittaa kameravakiota.



Kuva 18. Refraktion korjaus kuvakoordinaatteihin.

### 3.3.3 Yhdistetty refraction ja maankaarevuuden vaikutus näkyvään horisonttiin

Refraktion vaikutus horisontissa on päinvastainen kuin maankaarevuuden vaikutus (kuva 19). Mitattaessa näkyvää horisonttia kuvalla voidaan käyttää standardi-ilmakehän tapauksessa refraktiokorjauskerrointa  $K_h=0.9216$  [22].



Kuva 19. Refraktion vaikutus näkyvän horisontin sijaintiin kuvalla. Kun maankaarevuuden vuoksi kulma horisonttien välillä kasvaa, säteen taipumisen takia kulma pienenee.

Lopullinen eri horisonttien välinen kulma  $\theta_2$  **radiaaneina** saadaan yhdistämällä refraktion ja maankaarevuuden vaikutus:

$$\theta_2 = K_h \arctan \frac{\sqrt{2RH + H^2}}{R}, \quad (59)$$

missä  $K_h$  on edellisessä kappaleessa esitetty refraktiota korjaava vakio horisontille (standardi-ilmakehälle 0.9216),  $R$  on maan säde ja  $H$  on kameran korkeus. Likiarvoisena sama voidaan kirjoittaa:

$$\theta_2 \approx K_h \sqrt{\frac{2H}{R}}. \quad (60)$$

Sijoittamalla kaavaan standardi-ilmakehän refraktiokorjaus 0.9216, maan keskimääräinen säde 6371000 m ja muuntamalla radiaanit sekunneiksi saadaan yhtälö sievennettyä muotoon

$$\theta_2 = 106.5\sqrt{H}. \quad (61)$$

Tulos on siis **kaarisekunneina** ja kuvauskorkeuden  $H$  tulee olla metreissä. Kaarisekunnit on helppo muuttaa asteiksi, kun muistetaan, että 1 aste on 60 kaariminuuttia ja 1 kaariminuutti on 60 kaarisekuntia. Tulos muutetaan siis asteiksi jakamalla 3600:lla. [22]

Kameran korkeus metreinä	$\theta_2$ asteina
1	0.030
1.5	0.036
3	0.051
5	0.066
10	0.093
20	0.132
30	0.162
40	0.187
50	0.209
100	0.300
500	0.662
1000	0.936
2000	1.323
3000	1.620
4000	1.871
5000	2.092
10000	2.958

*Taulu 1. Esimerkkejä todellisen ja näkyvän horisontin välisistä kulmista eri kamera-korkeuksille.*

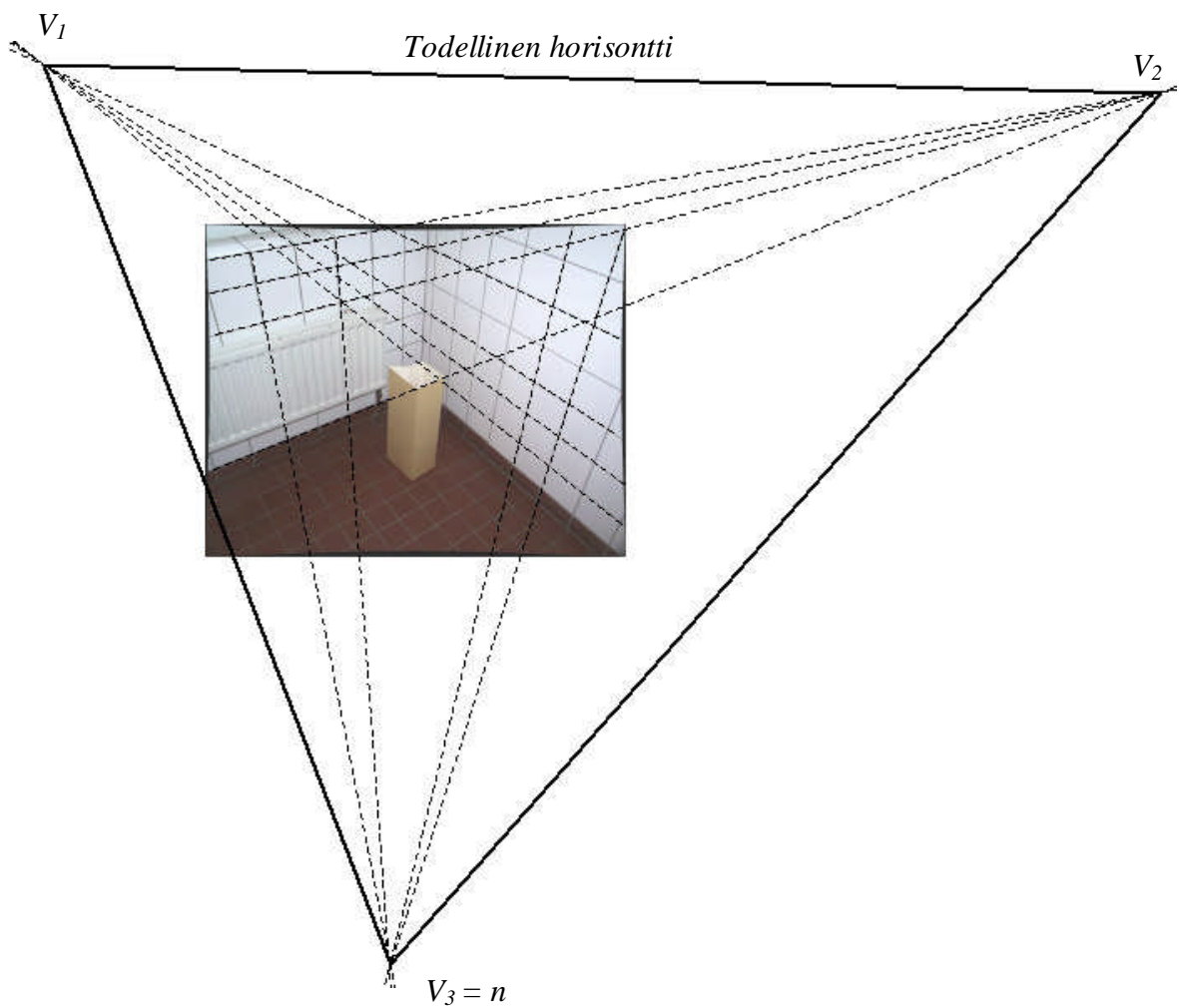
## 4 Lähteet

- [1] Bailey, D ja R. Shand, 1993, Determining Large Scale Sandbar Evolution, Proceedings of the 1st New Zealand Conference on Image and Vision Computing, sivut 109-116.
- [2] Fry, J., 1969, Methods of Graphical and Analytical Mensuration of Single Terrestrial Photographs, CIVIL Engineering Studies, Photogrammetry Series no. 23, University of Illinois, Urbana, Illinois, 180 sivua.
- [3] Ghosh, S., 1988, Analytical Photogrammetry, Second edition, Pergamon Press, U.K., 308 sivua.
- [4] Hakkarainen, J., 1973, Ilmakuvakameran kaartuman määrittäminen goniometrillä ja ilmakuvan ja ilmakuvausobjektiivin laadun tutkiminen, Lisensiaattityö, Maanmittausosasto, TKK, 177 sivua.
- [5] Hartley, R. ja A. Zisserman, 2000, Multiple View Geometry in Computer Vision, Cambridge University Press.
- [6] Kasser, M. ja E. Yves, 2002, Digital photogrammetry, Taylor&Francis. London, 351 sivua.
- [7] Kivelä, S., 1989, Algebra ja Geometria, Toinen korjattu painos, Otatieto, 201 sivua.
- [8] Kraus, K., 1993, Photogrammetry, Volume 1, Fundamentals and Standard Process, Ferd. Dummlers Verlag, Bonn, 397 sivua.
- [9] Löfström, K., 1949, Maa- ja Ilmakuvamittaus, Teknillinen Korkeakoulu, Moniste n:o 88., 188 sivua.
- [10] Manual of Photogrammetry, 1980, Fourth Edition, American Society of Photogrammetry.
- [11] McNeil, G., 1954, Photogrammetric Measurements, Problems and Solutions, Pitman Publishing Corporation, New York.
- [12] Mikhail E., J. Bethel ja J. McGlone, 2001, Introduction to Modern Photogrammetry, John Wiley & Sons, Inc., New York, 479 sivua.
- [13] Moffit, F., 1967, Photogrammetry, second edition, International Textbook Company, Scranton, Pennsylvania, 540 sivua.
- [14] Moffit, F. H., E. M. Mikhail, 1980, Photogrammetry, Third edition, Harper & Row Inc., 648 sivua.
- [15] Niini, I., 1990, Kuvien keskinäinen orientointi kaksikulotteisia projektiivisiä muunnoksia käyttäen, Diplomityö, Maanmittausosasto, TKK, 74 sivua.

- [16] Nyström, E. J., 1968, Fotogrammetrian geometriset perusteet, Teknillinen Korkeakoulu – Maanmittausosasto, Fotogrammetrian laitos, 52 sivua.
- [17] Rönholm, P., 2002, Kiertomatriisi, Erikoistyö, Maanmittausosasto, TKK, 21 sivua.
- [18] Schenk, T., 1999, Digital Photogrammetry, Volume 1, TerraScience, 415 sivua.
- [19] Schwidersky, K., F. Ackermann, 1978, Fotogrammetria, Otapaino, Espoo, 384 sivua.
- [20] Torlegård, K., 1988, Fotogrammetrisk triangulering, Kungl Tekniska Högskolan, Institutionen för fotogrammetria, Stockholm, 159 sivua.
- [21] Williams, J., 1969, Simple Photogrammetry, Academic Press, London and New York.
- [22] Wolf, P., 1974, Elements of Photogrammetry, McGraw-Hill, 562 sivua.
- [23] Zhang, Z., 1998, A Flexible New Technique for Camera Calibration, Technical Report MSR-TR-98-71, Microsoft Research, Microsoft Corporation
- [24] Zhizhuo, W., 1990, Principles of Photogrammetry (With Remote Sensing), Press of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, Publishing House of Surveying and Mapping, Beijing, 575 sivua.

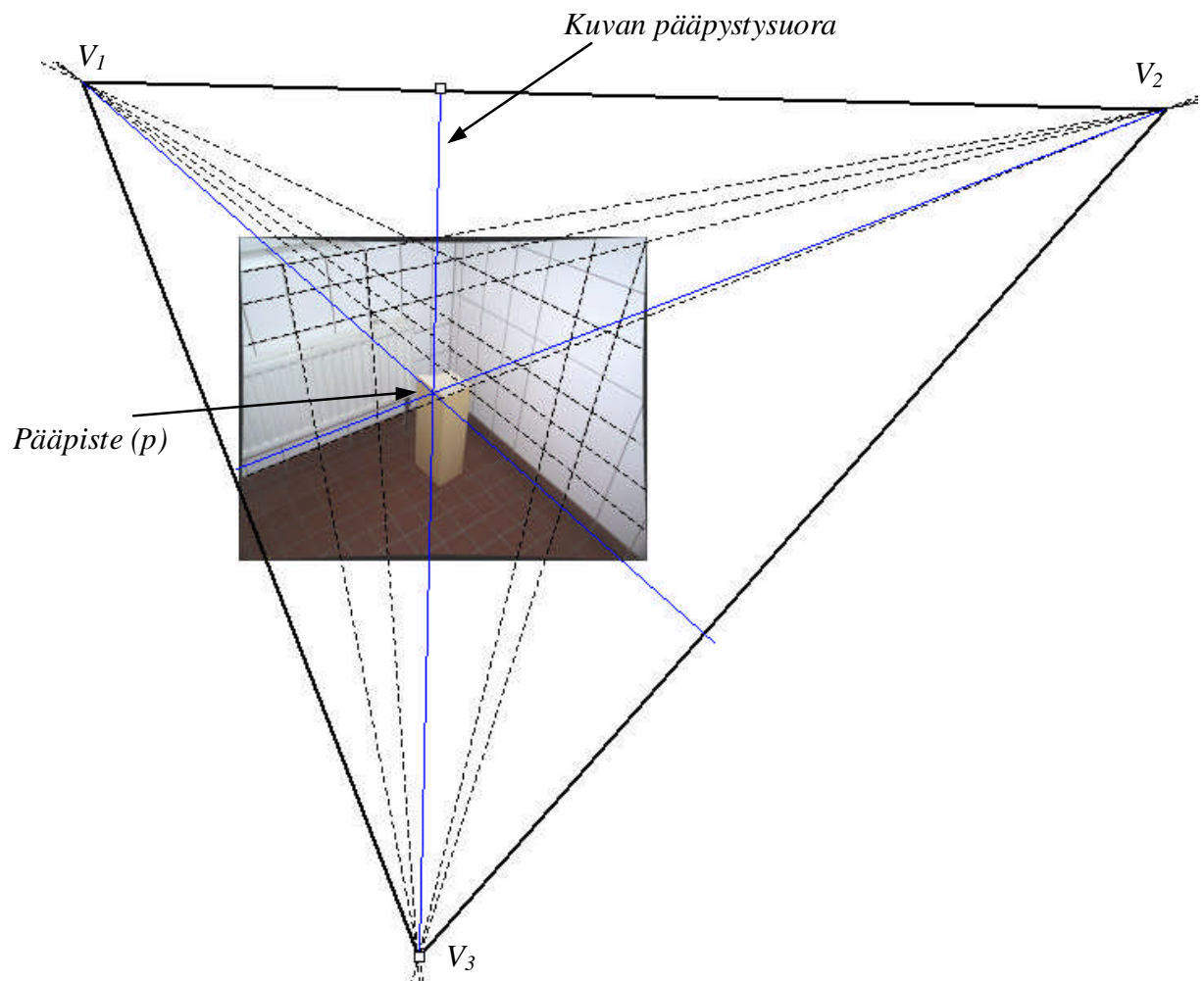
## LIITE 1. Kuvan pakopisteiden määrittäminen

Kohteen yhdensuuntaiset suorat kohtaavat pakopisteissä  $V_1$ ,  $V_2$  ja  $V_3$ . Kohteen pystysuorien suorien pakopistettä kutsutaan nadiiripisteeksi, jos kameran tähtäysakseli osoittaa horisontin alapuolelle. Jos tähtäysakseli osoittaa horisontin yläpuolelle puhutaan zeniiitistä.



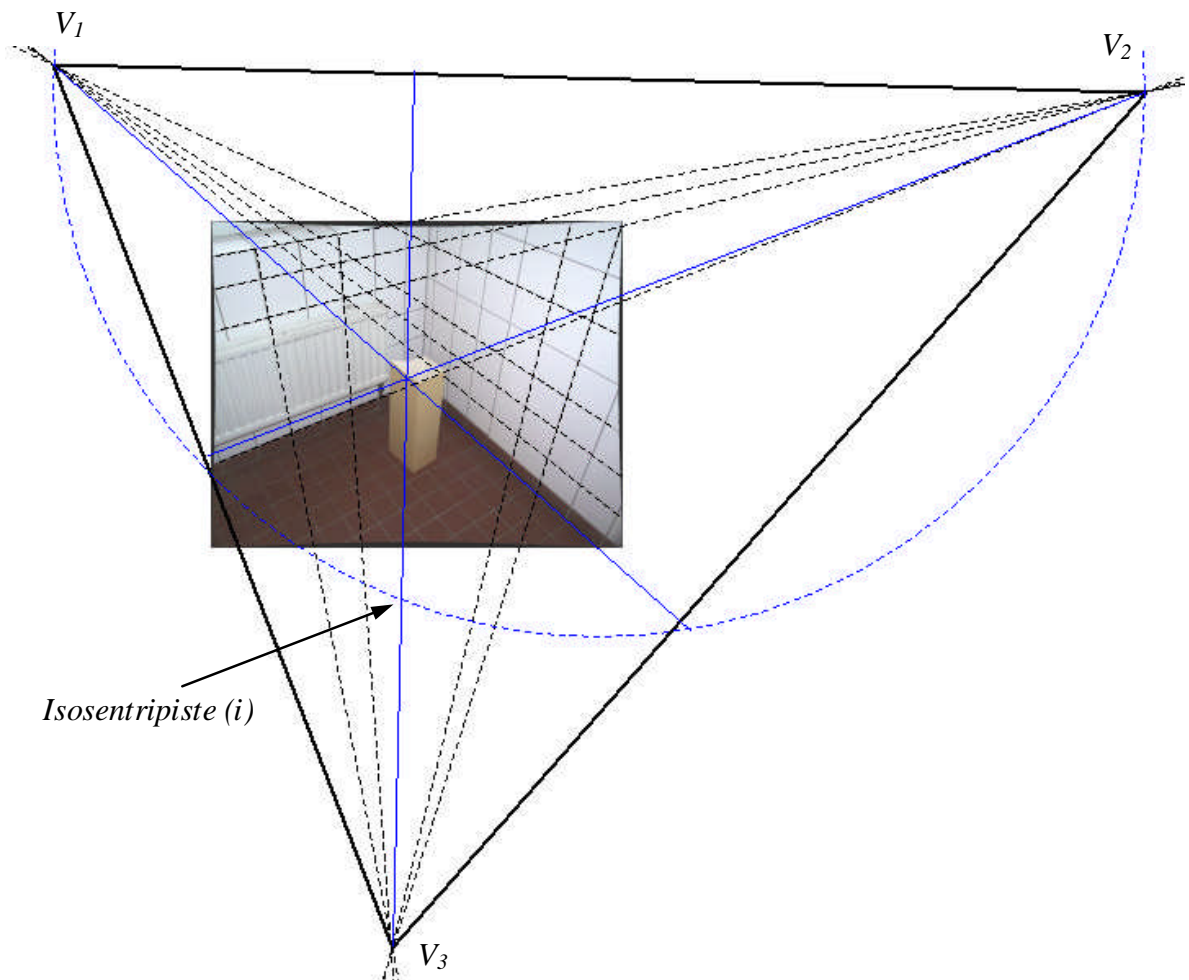
## LIITE 2. Kuvan pääpisteen määrittäminen pakopisteiden avulla

Kuvan pääpiste ( $p$ ) yhtyy pakopisteiden  $V_1$ ,  $V_2$  ja  $V_3$  muodostaman pakopistekolmion ortosentriiniin eli korkeusjanojen leikkauspisteisiin. Korkeusjana piirretään kohtisuorasti kolmion sivuun nähden siten, että se kulkee vastakkaisen pakopisteen kautta.



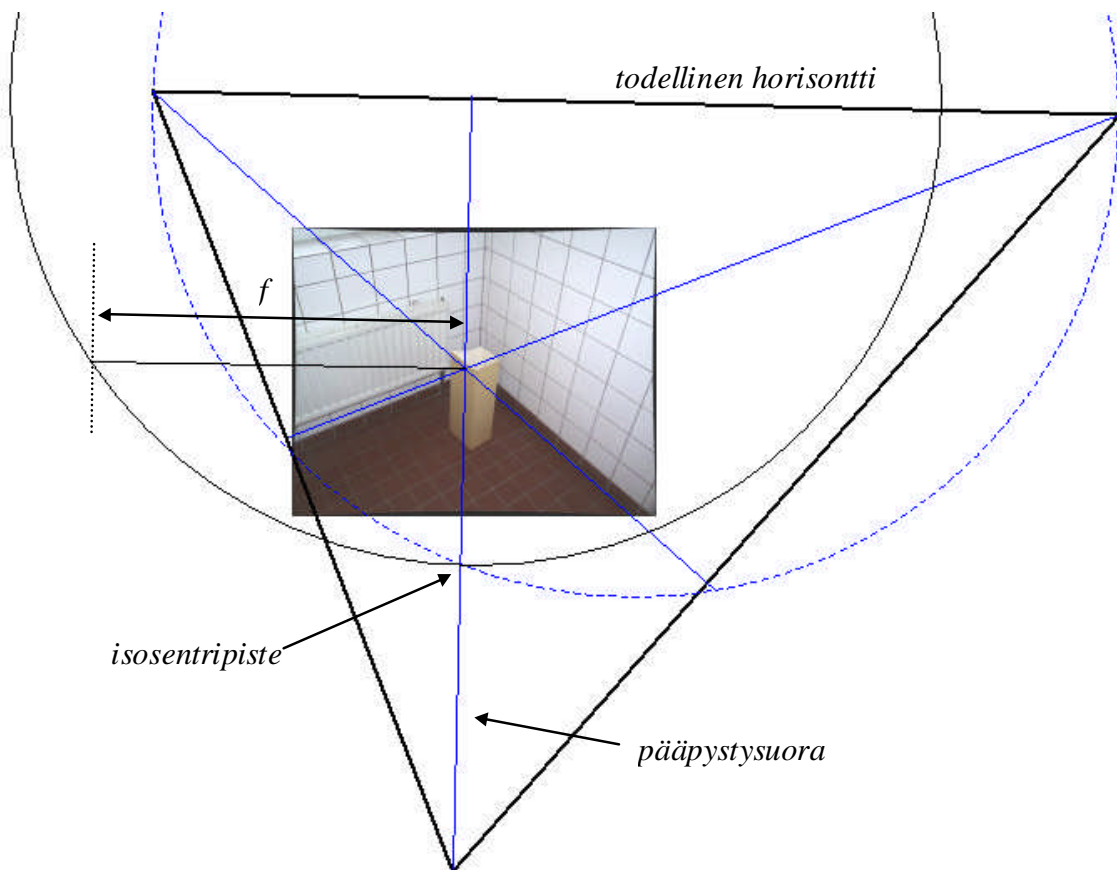
### LIITE 3. Kuvan isosentripisteen etsiminen graafisesti

Todellisella horisontilla sijaitsevien pakopisteiden  $V_1$  ja  $V_2$  kautta piirretään ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee myös horisonttiviivalla. Isosentripiste on ympyrän kaaren ja pääpysty-suoran leikkauspisteessä. Vastaavalla tavalla voitaisiin määrittää myös kahdella muulla korkeusjanalla sijaitsevat isosentripisteet.



#### LIITE 4. Kameran polttovälin määrittäminen graafisesti

Piirretään kuvan päävaakasuora, joka on kohtisuorassa pääpystysuoraa vastaan ja kulkee kuvan pääpisteen kautta. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on horisontin ja pääpystysuoran leikkauspisteessä. Ympyrän säde valitaan niin, että ympyrän kaari kulkee isosentripisteen kautta. Ympyrän kaaren ja päävaakasuoran leikkauspisteen etäisyys kuvan pääpisteestä vastaa kuvan projektiokeskuksen ja kuvatason välistä etäisyyttä eli kameran polttoväliä.



## LIITE 5. Perspektiivisen kohteen isosentriprojektion graafinen määrittäminen

Isosentriprojektiolla voidaan perspektiivinen kuva projisoida samaan mittakaavaan, jolloin saadaan kohteesta tasoprojektio. Isosentripisteestä vedetään kohteen nurkkien kautta suorat. Valitaan yksi nurkka, jonka mittakaavassa projektio tehdään. Piirretään isosentripisteestä suorat pakopisteisiin ( $k$ ). Kohteen sivun pituus määräytyy, kun suoran ( $k$ ) suuntainen valitusta nurkasta lähtevä suora leikkaa isosentripisteestä piirretyn viereisen nurkan kautta kulkevan suoran.

